

Кафедра общей и теоретической физики

Д. Кинельская¹

Сила светового давления, действующая на пылевую частицу хвоста кометы

(научно-исследовательская работа)

Аннотация

В данной работе рассмотрена задача вычисления и анализа силы, действующей со стороны электромагнитного излучения Солнца на сферическую частицу хвоста кометы, соответствующего механического потенциала и эффективного давления в приближении геометрической оптики. В большинстве работ по кометам используются грубые оценки для силы и давления света на сферическую частицу. В связи со сказанным, в данной работе проводится построение алгоритма расчета указанных характеристик на более высоком уровне точности. Последний достигается учетом геометрии формы частицы, процессов отражения, преломления и поглощения световых лучей телом частицы. Путем построения механического потенциала осуществляется учет действия светового давления на частицу хвоста кометы при поиске законов движения последней в окосолнечном пространстве в рамках лагранжева или гамильтонова формализмов. Исследование кинематики хвостов комет позволит получить информацию о межпланетном магнитном поле, солнечной активности и других характеристиках межпланетной среды.

Комментарии: работа выполнена под научным руководством педагога дополнительного образования по астрономии, руководителя астроклуба "Апогей" Снетковой Ю.А.² и представлена на Самарской областной конференции научно-исследовательских работ школьников в 2008 г., а также на Всероссийской конференции для одаренных школьников "Intel-Династия-Авангард 2008".



Работа выставлена на **ASTRODROME**: 26.02.2008

¹E-mail:

²E-mail: JSnet@mail.ru

Оглавление

1	Введение	3
2	Излучение черного тела. Формула Планка	10
2.1	Тепловое излучение и его характеристики	11
2.2	Формулы Рэля–Джинса и Вина	13
2.3	Гипотеза о квантах. Формула Планка	15
3	Сила и потенциал светового давления	17
3.1	Определение модели физической системы	17
3.2	Вычисление силы светового давления для сферической частицы	18
3.3	Вычисление параметра A_0 . Определение потенциала и светового давления	21
3.4	Определение параметра $\rho(\theta)$	24
3.5	Вычисление интегралов \mathcal{I}_1 , \mathcal{I}_2	27
4	Результаты вычислений и сравнительный анализ	29
4.1	Численные результаты для силы светового давления	29
4.2	Сравнительный анализ силы притяжения и силы светового давления	31
4.3	Численные результаты для эффективного светового давления	32
5	Заключение	35
	Литература	37

Глава 1

Введение

Кометы – одни из самых удивительных и загадочных объектов Солнечной системы. Начало наблюдений комет восходит к глубокой древности: они наблюдались астрономами Древнего Египта и Китая. С тех пор человек узнал много о природе комет. Первые наблюдения, по которым впоследствии оказалось возможным определить приближенные орбиты, были сделаны в середине первого тысячелетия до нашей эры. Тихо Браге окончательно доказал космическую природу комет на примере кометы 1577 года, параллакс которой оказался значительно меньше лунного. Первая орбита кометы была вычислена Галлеем вскоре после появления ньютоновской небесной механики. Данный факт стал одним из самых веских доказательств того, что механика Ньютона имеет право носить статус науки.

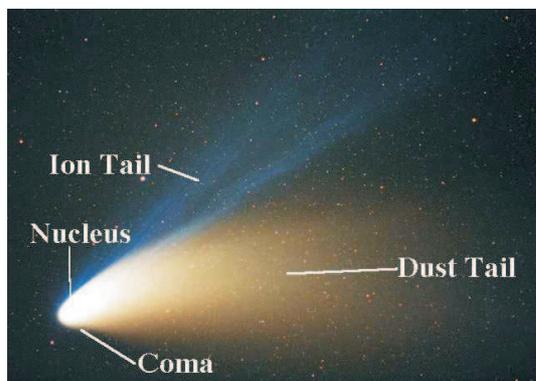


Рис. 1.1: Комета Хэйла-Боппа в марте 1997 г. Комета имеет два хвоста: ионный (более слабый, голубого цвета, состоящий из ионизованного вещества) и газопылевой (ярко-белый).

Традиционно в структуре кометы можно выделить 3 основных элемента: ядро, кому и хвост. Согласно современным представлениям, ядро – центральное тело, состоящее из льдов замерзших газов и космической пыли, кома – газопылевая оболочка, окружающая ядро, хвост – разряженное газопылевое облако, имеющее, как правило, большую протяженность ($\cong 9 \cdot 10^8$ км) и направленное от Солнца. По своему составу хвосты комет подразделяются на 2 основных вида: ионные и пылевые.

Исследователи комет неоднократно задавались вопросами: в силу каких физических процессов комета при сближении с Солнцем сильно меняет свой облик: появляется голова и хвост? Почему хвост кометы, как правило, направлен от Солнца? Что образует хвост кометы?



Рис. 1.2: Комета Галлея в марте 1986 года

Рассуждая о природе комет, Иоганн Кеплер впервые делает предположение, что кометные хвосты представляют собой поток частиц, отбрасываемых действием света прочь от Солнца по мере сближения кометы с Солнцем. Кеплер в 1619 году писал: "Грязная материя скучивается, образуя голову кометы.

Солнечные лучи, падая на нее и проникая через ее толщу, вновь преобразуют ее в тончайшее вещество эфира и, выходя из нее, образуют по другую сторону световую полосу, которую мы называем кометным хвостом. Таким образом, комета, выбрасывая из себя хвост, тем самым разрушает себя и уничтожается"[1]. Кеплер был первым, кто глубоко осознал и указал на существенную роль солнечного излучения в эволюции тел Солнечной системы, в частности, комет.

В начале XIX столетия были сделаны первые попытки определения по наблюдениям комет отталкивательной силы Солнца (Ольберс, Брунс и другие).

В 1836 году Бесселем была опубликована работа, ставшая классической, о движении частиц кометы под действием силы притяжения Солнца и его отталкивательной силы. Последняя, как априорно предполагалось, изменяется (подобно силе притяжения) как $\frac{1}{r^2}$, где r – расстояние от геометрического центра Солнца до точки наблюдения.

Предполагая наличие выбросов разряженной материи из головы кометы в направлении на Солнце, Бессель предложил алгоритм вычисления закона движения частиц кометы в зависимости от принятой величины отталкивательной силы, а также разработал методику сопоставления теоретических результатов с результатами наблюдений.

Задача была весьма сложной, поскольку необходимо было учесть, что комета может проецироваться на небосвод (картинную плоскость) любым образом в зависимости от расположения ее орбиты по отношению к Земле и положения кометы на орбите, а также изменение условий проецирования. Несмотря на то, что метод Бесселя был приближенным, в рамках последнего в зависимости от принятого значения отталкивательной силы можно было теоретически получать различные формы хвостов и сравнивать с данными наблюдений.

Дальнейшее развитие механическая теория кометных форм получила в работах известного московского астронома, впоследствии академика, Ф.А. Бредихина (1831-1904). Бредихин, совершенствуя теорию Бесселя, исправил в ней

ряд неточностей, при поддержке московских ученых нашел закон движения частицы при различных физических условиях и провел детальный анализ результатов наблюдений комет как прошлых лет, так и всех ярких комет XIX столетия. На основе данного анализа Бредихиным в 1878 году была предложена классификация хвостов комет.



Рис. 1.3: Комета Икея-Секи (C/1965 S1). Яркий пример образования хвоста II типа (Фото с 4-минутной выдержкой получил Roger Lynds 29 октября 1965 года в Kitt Peak).

Им было выделено три основных типа в зависимости от среднего значения отталкивательной силы, действующей на частицы, составляющие данные хвосты.

В хвостах I типа, обычно тонких прямолинейных, сила отталкивания в 10 - 100 раз больше силы притяжения [2]. Вследствие этого ось хвоста расположена почти вдоль продолжения радиуса-вектора ядра кометы (см. рис. 1.2).

Хвосты II типа – часто яркие, широкие и кривящиеся, образуются под действием отталкивательной силы, равной или несколько большей силы притяжения (0.5-2.5 раза).

Ось хвоста II типа на малых расстояниях от головы почти прямолинейна и направлена почти вдоль продолжения радиуса-вектора ядра, как и хвост I типа.

Однако, уже на расстояниях в несколько градусов от головы кометы становится заметной кривизна хвоста, который отклоняется в сторону, противоположную направлению движения кометы (см. рис. 1.3, 1.4).

В хвостах III типа действует еще меньшая отталкивательная сила (0-0.3 от силы притяжения); частицы движутся под действием ослабленного притяжения к Солнцу. Эти хвосты обычно короткие, расположенные под значительным углом к продолжению радиуса-вектора ядра кометы. Особый интерес в рассмотрении вызывают "аномальные хвосты", направленные не от Солнца, а к Солнцу! Такие хвосты наблюдались у некоторых комет (комета 1910 года, комета 1957 III).

Ф.А. Бредихин первым разработал методы непосредственного определения отталкивательной силы не по кривизне хвоста, а по движению облачных масс в кометах. На основе данных методов были впервые экспериментально

обнаружены силы отталкивания, в несколько (десятки) раз превосходящие силы тяготения. Были сделаны попытки объяснения образования различных сложных структур - потоков и лучей, наблюдавшихся в головах и хвостах комет, в частности, системы прямолинейных полос в хвостах II типа, которые Бредихин назвал "синхронами", т.е. образованными частицами, одновременно выброшенными из ядра ("хронос" - время).

Дальнейшее развитие механической теории кометных форм привело к необходимости поиска ответа на вопрос: какова природа отталкивательных сил Солнца? Однако природа отталкивательной силы оставалась неизвестной.



Рис. 1.4: Комета West (C/1975 V1). Комета также имеет два типа хвостов: хвост I типа определяется синим ионным газовым свечением; хвост II типа есть яркий белый пылевой "шлейф".

Так, еще Г.В. Ольберс, исследуя комету 1811 года, счел необходимым для объяснения искривления хвоста ввести действие на его частицы некоторой отталкивательной силы Солнца помимо ньютоновского притяжения. Он же высказал предположение об электрической природе данной силы.

Целльнер имел еще более "радикальный" ответ на данный вопрос. Он предполагал, что Солнце обладает гигантским электрическим зарядом, порождающим электрическое поле.

Последнее действует на частицы хвоста кометы, которые приобрели электрический заряд в силу их взаимных столкновений и трения [3].

Ф.А. Бредихин тоже склонялся к данной точке зрения. Но впоследствии выяснилось, что Солнце не может обладать столь большим электрическим зарядом, какой требовался в данной гипотезе.

Новые возможности в объяснении природы данных сил появились после того, как было предсказано, а затем на опыте подтверждено действие света (как частного проявления электромагнитного поля) на материальные тела. Еще Максвелл в середине XIX столетия показал, что свет должен оказывать давление на поверхность, поставленную на пути светового потока. Опыты, подтвердившие предсказание Максвелла, были выполнены в 1900 году русским физиком П.Н. Лебедевым [4].

Детальные исследования хвостов комет, разработку новых методов определения отталкивательных сил после Бредихина проводили Р.Е Герман, К.Д. Покровский, А.Я Орлов, И.Ф. Полак и, главным образом, С.В. Орлов, создавший в Москве школу исследователей комет, в которую входили Н.Д. Моисеев,

Б.А. Воронцов-Вельяминов, С.К. Всехсвятский, Ю.В. Филиппов и другие.

В результате активной и плодотворной работы московской кометной группы были не только усовершенствованы методы проецирования кометных хвостов, но были рассмотрены и другие вопросы механической теории, важнейшие задачи космогонии комет, начаты широкие исследования в области спектроскопии и фотометрии комет. Позднее усовершенствование механической теории и сложных методов обработки кометных наблюдений разрабатывались в Киеве (кафедра астрономии КГУ и ГАО АН УССР), а также в Душанбе, в группе исследователей комет О.В. Добровольского.

Опытные исследования показали, что световое давление играет ключевую роль в формировании пылевых хвостов комет (см. рис. 1.5).

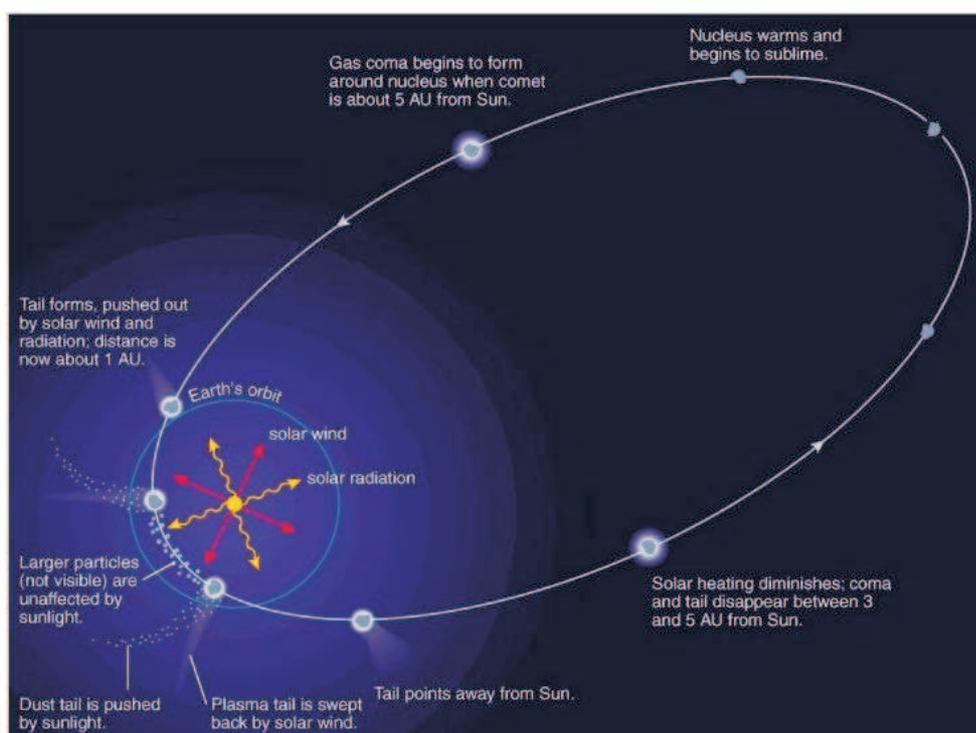


Рис. 1.5: Образование газового и пылевого хвостов кометы.

Важно отметить, что наиболее последовательное и логически обоснованное объяснение явления светового давления было дано лишь в рамках квантовой теории, на основе корпускулярных представлений об электромагнитном излучении. Именно здесь удастся получить явное аналитическое выражение для силы светового давления, действующей на частицу хвоста кометы, опираясь на ряд базисных принципов и соотношений квантовой теории.

Так, современная теория светового давления в газах была разработана Бааде и Паули в 1927 году на основе квантово-механических представлений и применена к описанию кометных форм Вурмом в 1934 году [2].

В связи со сказанным приходим к выводу о необходимости прецизионного расчета силы светового давления на пылевые частицы хвоста кометы, по-

скольку

- данная характеристика играет ключевую роль в описании массовых потерь вещества кометы, а следовательно, и в эволюции ее орбиты, в определении времени жизни кометы, а также в точном определении законов движения ядра и частиц хвоста кометы. Большой интерес к эволюции кометы обусловлен необходимостью решения широкого спектра открытых вопросов космогонии;
- в конце 20-ого столетия стали возможными прямые космические исследования кометной материи (Вега, Deep Impact, StarDust и др.), в связи с чем резко возросла необходимость в точном определении законов движения ядра и частиц хвоста кометы. С учетом особенностей движения комет моделируются программы полетов космических аппаратов. Указанные законы движения комет могут быть получены лишь при высокоточном определении силы светового давления;
- еще Бирман и Люст указывали на важную роль исследования хвостов комет как зондов межпланетной среды. Именно пылевые хвосты наиболее доступны в исследованиях, поскольку они, как правило, значительно более яркие, чем ионные, имеют значительно большую видимую протяженность. Исследование кинематики хвостов комет позволит получить информацию о межпланетном магнитном поле, солнечной активности, электрическом поле Солнца и других физических процессах и явлениях в областях, далеких от Земли и от плоскости эклиптики.

В большинстве наиболее известных работ по кометам ([2], [5], [6]) для определения важных параметров в описании эволюции кометы (например, критический радиус частицы) использовалось приближенное выражение для силы светового давления, которое было получено в случае нормального падения излучения Солнца на плоскую черную площадку с использованием большого набора экспериментальных данных и чисто феноменологических зависимостей. Рассеяние электромагнитного излучения на сферических частицах рассматривалось в теории Ми [7]-[12]. Однако в данной теории выражение для силы давления представлялось в виде бесконечного ряда, слагаемые которого невозможно было просуммировать и, следовательно, получить численные значения. Это создавало значительные неудобства в использовании полученного выражения в расчетах.

Таким образом, **целью настоящей работы** является построение алгоритма расчета силы светового давления и соответствующего эффективного светового давления (ЭСД) на более высоком уровне точности в случае сферической частицы пылевого хвоста кометы в рамках геометрической оптики.

Более высокий уровень точности достигается учетом геометрии формы частицы, процессов отражения и поглощения световых лучей силикатной частицей.

Основными задачами в данной работе являются:

1. Вычисление и анализ силы светового давления на сферическую силикатную частицу в приближении геометрической оптики.
2. Вычисление и анализ эффективного светового давления на пылевую частицу.
3. Построение механического потенциала светового давления по аналогии с гравитационным потенциалом Солнца. Данный потенциал может быть использован при описании динамики частицы под действием гравитационных сил ядра кометы, Солнца и силы светового давления.
4. Сравнительный анализ силы светового давления с силой притяжения, действующей на частицу со стороны Солнца.

В отличие от предшествующих работ в данной работе мы используем минимальный набор экспериментальных данных и избегаем в использовании чисто феноменологические зависимости.

Итак, данная работа имеет следующую структуру.

Вторая глава включает основные теоретические аспекты квантовой механики, отдельные результаты которых будут использованы для решения поставленных задач.

Третья глава посвящена прецизионному расчету силы светового давления (а также эффективного светового давления и соответствующего потенциала), действующей на силикатную частицу сферической формы.

В **четвертой главе** представлен численный анализ полученных результатов, а также графики различных зависимостей.

Финальная часть работы представлена **заключением**, в котором резюмируются итоги проведенной работы.

Глава 2

Излучение черного тела. Формула Планка

В настоящей работе одним из объектов, входящих в рассматриваемую физическую систему, является Солнце. Мы его моделируем как абсолютно черное тело, поскольку электромагнитное излучение Солнца характеризуется непрерывным спектром, близким по своей природе к спектру абсолютно черного тела. Для расчета силы светового давления (а также соответствующего светового давления и механического потенциала) необходимо правильно смоделировать процесс взаимодействия солнечного излучения с веществом частицы хвоста кометы. Для решения этой проблемы, прежде всего, нужно знать основные свойства и характеристики теплового излучения Солнца, а значит, излучения абсолютно черного тела. В настоящей главе особое внимание уделяется указанному вопросу с подробным выводом формулы Планка, в дальнейшем используемой в наших расчетах.

В последней четверти XIX века было завершено построение термодинамики и создана теория электромагнитных явлений. Термодинамика удовлетворительно описывала широкий круг явлений, связанных с веществом, т. е. с корпускулярной формой материи. Теория электромагнетизма удовлетворительно описывала явления, связанные с электромагнитным полем, и в частности, с электромагнитными волнами и светом. В форме электромагнитных волн электромагнитное поле обрело свое самостоятельное существование независимо от зарядов и токов, которыми оно порождается. В физику вошло представление о полевой форме материи в виде излучения. Возникла принципиальная проблема корректного описания процессов взаимопревращения излучения и вещества. Представлялось естественным решить указанную проблему в рамках классической физики, поскольку каждая из форм материи описывалась соответствующей классической теорией. Однако недостаточность классической физики для понимания взаимоотношения этих форм материи ярко проявилась при изучении излучения черного тела.

2.1 Тепловое излучение и его характеристики

Многочисленные эксперименты показали, что любое тело, температура которого выше абсолютного нуля, неминуемо теряет часть внутренней энергии в форме излучения. Поэтому всякое тело является источником электромагнитных волн, заключенных в широком диапазоне частот. Это излучение называют *тепловым излучением*.

Было обнаружено, что данное излучение имеет непрерывный спектр. Это означает, что любое тело испускает некоторое количество энергии излучения в любом диапазоне частот или длин волн. Распределение энергии излучения тела по спектру зависит от температуры тела. При этом для всех тел с увеличением температуры максимум энергии излучения смещается в коротковолновый участок спектра, а общая энергия излучения возрастает.

Если несколько излучающих тел окружить идеально отражающей, непроницаемой для излучения оболочкой, то по истечении некоторого промежутка времени в системе "излучающие тела + излучение в полости" установится термодинамическое равновесие. Это означает, что температуры всех тел выровняются, и в любой момент времени каждое тело будет испускать и поглощать одинаковые порции энергии излучения. Такое равновесное состояние системы устойчиво, то есть после всякого нарушения его состояние равновесия вновь восстанавливается. Термодинамическое равновесие установится и в полости, стенки которой выполнены из любого реального материала и поддерживаются при некоторой неизменной температуре.

Способность теплового излучения находиться в равновесии с излучающим телом отличает тепловое излучение от других видов излучения тел. Поэтому такое излучение, находящееся в равновесии с излучающим телом, будем называть *равновесным*.

Равновесному излучению можно приписать температуру тела, с которым оно находится в равновесии, распространив при этом законы равновесной термодинамики на тепловое излучение. Это означает, что для равновесного теплового излучения можно определить и рассчитать внутреннюю энергию, давление, энтропию и другие термодинамические характеристики, которые не будут изменяться со временем.

Равновесное тепловое излучение однородно, то есть его плотность энергии одинакова во всех точках внутри полости, где оно заключено. Такое излучение изотропно и неполяризовано – оно содержит все возможные направления распространения и направления колебаний векторов \vec{E} и \vec{H} .

Для описания спектрального состава теплового излучения рассмотрим энергию, излучаемую единицей поверхности нагретого тела в единицу времени в узком диапазоне частот от ω до $\omega + d\omega$. Этот поток лучистой энергии dL ,

испускаемый с единицы поверхности тела по всем направлениям, пропорционален ширине спектрального диапазона, то есть $dL = M d\omega$. Энергию M , приходящуюся на единичный диапазон частот, называют *спектральной испускательной способностью* тела или *спектральной плотностью энергетической светимости*. Опыт показывает, что для каждого тела испускательная способность является определенной функцией частоты, вид которой изменяется при изменении температуры тела T .

Суммарный поток энергии излучения с единицы поверхности тела по всему диапазону частот

$$L = \int_0^{\infty} M(\omega, T) d\omega \quad (2.1)$$

называется *интегральной испускательной способностью* тела или его *энергетической светимостью*. В системе СИ энергетическая светимость измеряется в Вт/м², а спектральная испускательная способность имеет размерность Дж/м².

Для описания процессов поглощения излучения телами вводится *спектральная поглощательная способность* тела $\alpha(\omega, T)$. Предположим, что можно выделить узкий интервал частот $(\omega + d\omega)$. Пусть $d\Phi_{\text{fall}}(\omega)$ – поток излучения, падающего на тело, а $d\Phi_{\text{abs}}(\omega)$ – часть потока, поглощенного последним, то поглощательной способностью тела на частоте (ω) называется безразмерная величина вида:

$$\alpha(\omega, T) = \frac{d\Phi_{\text{abs}}(\omega)}{d\Phi_{\text{fall}}(\omega)}, \quad (2.2)$$

которая характеризует долю падающего на тело излучения частоты ω , поглощенную телом.

Опыт показывает, что любое реальное тело поглощает излучение различных частот по разному в зависимости от его температуры. Поэтому спектральная поглощательная способность тела $\alpha(\omega, T)$ является функцией частоты ω , вид которой изменяется при изменении температуры тела T .

По своему определению поглощательная способность тела не может быть больше единицы. При этом тело, у которого поглощательная способность меньше единицы и одинакова по всему диапазону частот, называют *серым телом*.

Особое место в теории теплового излучения занимает *абсолютно черное тело (АЧТ)*. Так Г. Кирхгоф назвал тело, у которого на всех частотах и при любых температурах поглощательная способность равна единице. Реальное тело всегда отражает часть энергии падающего на него излучения.

Абсолютно черное тело является эталонным телом в теории теплового излучения. И хотя в природе нет абсолютно черного тела, достаточно просто реализовать модель, для которой поглощательная способность на всех ча-

стотах будет пренебрежимо мало отличаться от единицы (полость с малым отверстием).

Излучение такой модели с большой степенью точности можно считать излучением абсолютно черного тела, имеющего температуру T . Исследуя распределение энергии этого излучения по спектру (Ф. Курлбаум [13], О. Люммер, Э. Прингсгейм [14] и др. [15]–[16]), можно экспериментально определить испускательные способности абсолютно черного тела $M(\omega, T)$.

В 1853 году Г. Кирхгофом был сформулирован закон теплового излучения при изучении термодинамических закономерностей равновесных систем с излучением, согласно которому *отношение испускательной и поглощательной способностей одинаково для всех тел в природе, включая абсолютно черное тело, и при данной температуре является одной и той же универсальной функцией частоты* или

$$\left(\frac{M(\omega, T)}{\alpha(\omega, T)}\right)_1 = \left(\frac{M(\omega, T)}{\alpha(\omega, T)}\right)_2 = \left(\frac{M(\omega, T)}{\alpha(\omega, T)}\right)_3 = \dots = \frac{M(\omega, T)}{1} = f(\omega, T). \quad (2.3)$$

Из закона Кирхгофа следует, что универсальная функция $f(\omega, T)$ есть спектральная испускательная способность $M(\omega, T)$ абсолютно черного тела по шкале частот.

Излучение абсолютно черного тела имеет универсальный характер в теории теплового излучения. Реальное тело излучает при любой температуре всегда меньше энергии, чем абсолютно черное тело. Зная испускательную способность абсолютно черного тела (универсальную функцию Кирхгофа) и поглощательную способность реального тела, из закона Кирхгофа можно определить энергию, излучаемую этим телом в любом диапазоне частот.

2.2 Формулы Рэля–Джинса и Вина

Одной из главных задач, стоящей перед физиками того времени, была проблема теоретического обоснования экспериментальной кривой распределения энергии по спектру излучения абсолютно черного тела.

В рамках классических представлений об излучении (излучение есть совокупность электромагнитных волн) с помощью теоремы о равномерном распределении энергии по степеням свободы из статистической физики Д.У. Рэлеем [17] в 1900 году было найдено выражение для $M(\omega, T)$:

$$M(\omega, T) = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} kT. \quad (2.4)$$

В 1905 году данный результат был строго обоснован Д. Д. Джинсом в работе [18] на основе классической электродинамики Максвелла. Это выражение

давало достаточно хорошее согласие с экспериментом при малых частотах. При больших ω спектральная плотность (2.4) значительно больше наблюдаемой, а при $\omega \rightarrow \infty$ получалось недопустимое значение $M(\omega, T) \rightarrow \infty$.

Кроме того, интегральная светимость излучения

$$L = \int_0^{\infty} M(\omega, T) d\omega = \infty, \quad (2.5)$$

что также недопустимо.

Классическая теория теплового излучения приводит к выводу о том, что при конечных значениях энергии излучения равновесие между веществом и излучением невозможно. Этот вывод противоречит опыту.

Такой противоречивый результат, содержащийся в формуле Рэля-Джинса, вывод которой с точки зрения классической теории не вызывал сомнений, П.С. Эренфест назвал *"ультрафиолетовой катастрофой"*.

Вин в 1896 году предложил другой подход к определению зависимости $M(\omega, T)$. Он предположил, что каждая мода колебаний является носителем энергии $E(\omega)$, но не все моды данной частоты возбуждены. Относительное число мод определяется распределением Больцмана:

$$\frac{\Delta N}{N} = e^{-E/kT}. \quad (2.6)$$

Отсюда средняя энергия, приходящаяся на моды с частотой ω :

$$\langle E \rangle = E(\omega) \frac{\Delta N}{N} = E(\omega) e^{-E/kT}. \quad (2.7)$$

Из общих термодинамических соображений Вин заключил, что энергия моды с частотой ω пропорциональна частоте $E(\omega) = \hbar\omega^1$. Учитывая выражение для $M(\omega, T)$, полученное в рамках классических представлений

$$M(\omega, T) = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} \langle E \rangle, \quad (2.8)$$

нетрудно определить, что

$$M(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} e^{-\hbar\omega/kT}. \quad (2.9)$$

Данное выражение есть формула Вина, которая дает хорошее согласие с экспериментом лишь в области достаточно больших частот.

Промежуточную область, включающую максимум кривой для $M(\omega, T)$, в классической теории описать не получалось.

¹ Коэффициент пропорциональности здесь дан в современных обозначениях в виде постоянной Планка, которая в то время еще не была известна.

2.3 Гипотеза о квантах. Формула Планка

"Ультрафиолетовая катастрофа" показала, что классическая физика содержит ряд принципиальных внутренних противоречий, которые проявились в теории теплового излучения и разрешить которые можно только с помощью принципиально новых физических идей.

Такая физическая идея была сформулирована в 1900 г. М. Планком в виде гипотезы о квантах. Согласно этой гипотезе *излучение испускается и поглощается веществом не непрерывно, а конечными порциями энергии*, которые Планк назвал *квантами энергии*. Величина кванта энергии зависит от частоты излучения и определяется формулой (2.17).

Гипотеза Планка о квантах нарушила "незыблемое" правило классической физики о том, что любая физическая величина, в том числе и энергия, изменяется непрерывным образом, и за бесконечно малый промежуток времени ее изменение всегда бесконечно мало. Эта гипотеза оказала огромное влияние на последующее развитие физики.

Основное отличие квантовой теории излучения от классической обнаруживается уже при расчете средней энергии излучения частоты ω . С учетом гипотезы Планка средняя энергия излучения определяется по формуле

$$\langle E \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} P_n E_n. \quad (2.10)$$

Здесь $E_n = n\hbar\omega$ – возможные значения энергии излучения, а P_n – вероятность того, что в состоянии термодинамического равновесия при температуре T излучение будет иметь энергию E_n . Эту вероятность можно оценить с помощью распределения Больцмана, записав ее с точностью до некоторой константы в виде

$$P_n = A e^{-E_n/kT}. \quad (2.11)$$

Если учесть, что $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$, то для константы A получаем значение:

$$A = \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-E_n/kT} \right)^{-1}. \quad (2.12)$$

Таким образом, в квантовой теории излучения среднее значение энергии излучения частоты ω определяется следующим выражением:

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\hbar\omega e^{-n\hbar\omega/kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\hbar\omega/kT}} = \hbar\omega \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-n\xi}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\xi}}, \quad (2.13)$$

где $\xi = \hbar\omega/kT$.

Сумму, стоящую в знаменателе этой формулы, определим по формуле геометрической прогрессии:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\xi} = \frac{1}{1 - e^{-\xi}}. \quad (2.14)$$

Формально дифференцируя это соотношение по ξ , находим сумму ряда, стоящего в числителе формулы (2.13):

$$\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-n\xi} = -\frac{dS}{d\xi} = \frac{e^{-\xi}}{(1 - e^{-\xi})^2}. \quad (2.15)$$

Подставляя найденные значения сумм в (2.13), получаем окончательно выражение для средней энергии излучения частоты ω в квантовой теории:

$$\langle E \rangle = \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}. \quad (2.16)$$

Заметим, что на малых частотах, когда $\frac{\hbar\omega}{kT} \ll 1$ и $e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} \approx 1 + \frac{\hbar\omega}{kT}$, из (2.16) приходим к формуле классической теории: $\langle E \rangle = kT$. Однако в области больших частот отличие средней энергии излучения, рассчитанной с классической и квантовой точки зрения, становится существенным. Но именно в этой области частот классическая теория излучения приводит к "ультрафиолетовой катастрофе". Квантовая теория излучения разрешает это противоречие теории и эксперимента. Действительно, подставляя (2.16) в (2.8), получаем известную *формулу Планка* для спектральной испускательной способности равновесного теплового излучения:

$$M(\omega, T) = f(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}. \quad (2.17)$$

Формула Планка находится в соответствии с результатами экспериментальных исследований излучения абсолютно черного тела на всех частотах и при всех температурах. При низких частотах формула (2.17) квантовой теории излучения переходит в формулу Рэля-Джинса классической теории. При высоких частотах, когда $\hbar\omega \gg kT$ и с высокой точностью $e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} \gg 1$, формула (2.17) переходит в соотношение Вина.

Можно отметить, что изложенный выше путь вывода формулы Планка был исторически первым. Впоследствии эта задача решалась в квантовой физике различными методами².

²Так, А. Эйнштейн предложил простой метод вывода формулы Планка (2.17), основываясь на представлениях о спонтанном и вынужденном испускании излучения и его вынужденном поглощении [19].

Глава 3

Сила и потенциал светового давления

В данной главе будет представлен расчет силы светового давления (соответствующего эффективного светового давления и потенциала), действующей на силикатную частицу сферической формы радиуса R_P и коэффициентом отражения $\rho(\theta)$.

3.1 Определение модели физической системы

Для решения поставленной задачи необходимо определить модель физической системы. Итак, рассматриваемую физическую систему представляют (1) электромагнитное излучение Солнца, падающее на (2) силикатную частицу сферической формы, принадлежащую хвосту кометы.

1. Как известно, электромагнитное излучение Солнца характеризуется непрерывным спектром, близким по своей природе к спектру абсолютно черного тела с эффективной температурой $T_{\odot} = 5777.11$ К [4], поэтому будем полагать, что Солнце есть абсолютно черное тело с температурой поверхности T_{\odot} . Следовательно, спектральная плотность энергетической светимости описывается формулой Планка (2.17).

2. Будем полагать, что Солнце по своей структуре является однородным шаром радиуса R_{\odot} со сферически-симметричным распределением массы, имеющим изотропный характер излучения. Само излучение является неполяризованным (естественный свет). Поглощением электромагнитного излучения Солнца межзвездной средой в пределах Солнечной системы будем пренебрегать.

3. Данное излучение будет представлено потоком фотонов, направления векторов импульса которых будет определяться единичным вектором \vec{k} , направленным от Солнца (другими словами, имеется плоский волновой фронт).

4. Силикатную частицу хвоста кометы будем представлять шаром радиуса R_P из оптически однородной среды с показателем преломления $n(\omega)$ (здесь ω – частота падающего излучения).

Указанные выше положения образуют тело модели.

3.2 Вычисление силы светового давления для сферической частицы

В данном параграфе будет найдено аналитическое выражение для силы светового давления, действующей на сферическую частицу хвоста кометы радиуса R_P с коэффициентом отражения $\rho(\theta)$.

Согласно второму и третьему законам Ньютона, сила светового давления может быть определена выражением:

$$\vec{F}_p = -\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}, \quad (3.1)$$

где $\Delta\vec{P}$ - изменение импульса, претерпеваемое системой фотонов, падающих на частицу за время Δt .

Выберем в качестве начала отсчета точку O , совпадающую с центром частицы, и систему координат так, как показано на рисунке 3.1. Тогда выражение (3.1) можно переписать в проекциях на координатные оси следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} OX: F_{px} &= -\frac{\Delta P_x}{\Delta t} \\ OY: F_{py} &= -\frac{\Delta P_y}{\Delta t} \\ OZ: F_{pz} &= -\frac{\Delta P_z}{\Delta t} \end{aligned} \right\}, \quad (3.2)$$

где проекции ΔP_x , ΔP_y , ΔP_z определяются следующими выражениями:

$$\left. \begin{aligned} \Delta P_x &= \Delta P_{1x} + \Delta P_{2x} \\ \Delta P_y &= \Delta P_{1y} + \Delta P_{2y} \\ \Delta P_z &= \Delta P_{1z} + \Delta P_{2z} \end{aligned} \right\}. \quad (3.3)$$

Здесь ΔP_{1x} , ΔP_{1y} , ΔP_{1z} - проекции изменения импульса системы фотонов, падающих на частицу и поглощаемых последней за время Δt ; ΔP_{2x} , ΔP_{2y} , ΔP_{2z} - проекции изменения импульса системы фотонов, падающих на частицу и отражаемых последней за тот же промежуток времени.

Будем полагать, что поток фотонов распространяется вдоль оси OZ (плоская электромагнитная волна).

Рассмотрим процесс падения фотона на площадку dS (см. рис. 3.1). Проекция изменения импульса фотона, поглощенного частицей, согласно рис. 3.1,

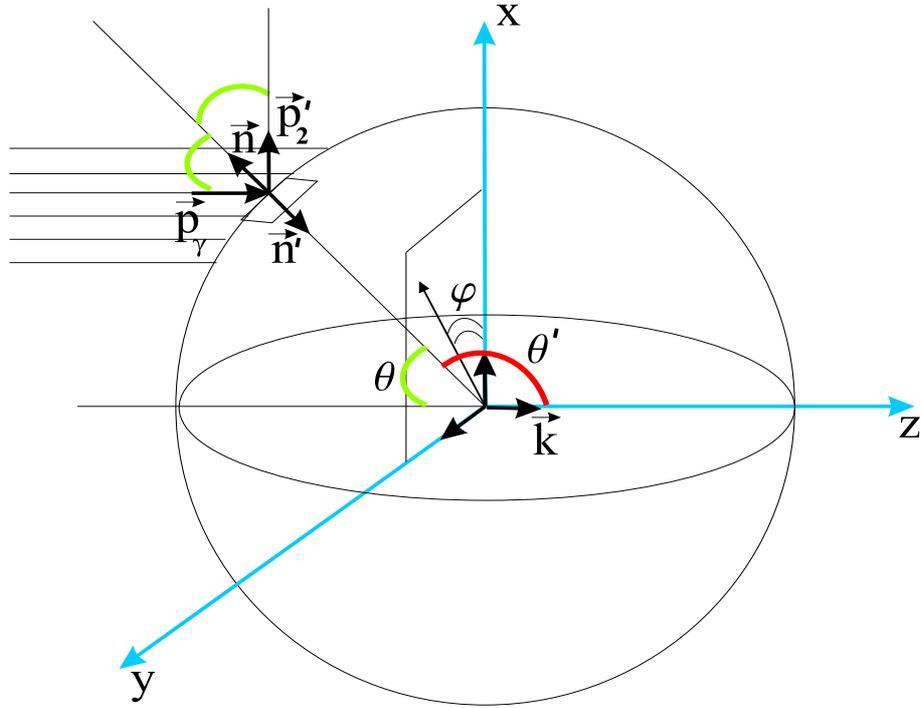


Рис. 3.1: Падение фотона на силикатную частицу

определяются следующей системой выражений:

$$\left. \begin{aligned} \Delta p_{1x} &= p'_{1x} - p_{1x} = 0 \\ \Delta p_{1y} &= p'_{1y} - p_{1y} = 0 \\ \Delta p_{1z} &= p'_{1z} - p_{1z} = -p_{\gamma} \end{aligned} \right\}. \quad (3.4)$$

В случае фотона, отраженного от площадки, проекции изменения импульса определяются следующей системой:

$$\left. \begin{aligned} \Delta p_{2x} &= p'_{2x} - p_{2x} = p_{\gamma} \sin 2\theta \cos \varphi, \\ \Delta p_{2y} &= p'_{2y} - p_{2y} = p_{\gamma} \sin 2\theta \sin \varphi, \\ \Delta p_{2z} &= p'_{2z} - p_{2z} = -p_{\gamma} \cos 2\theta - p_{\gamma} = -2p_{\gamma} \cos^2 \theta \end{aligned} \right\}. \quad (3.5)$$

Здесь φ - угол между проекцией радиуса-вектора точки падения луча на плоскость OXY и осью OX , $p'_{1\{x,y,z\}} = 0$ - импульс фотона в среде частицы.

Определим спектральный поток фотонов через площадку dS следующим выражением:

$$d\Phi(\omega) = \vec{j}(\omega) d\vec{S} = j(\omega) dS (\vec{k}\vec{n}') = j(\omega) dS \cos \theta, \quad (3.6)$$

$d\Phi(\omega)$ есть число фотонов, падающих на площадку dS за единицу времени с частотами, заключенными в интервале $(\omega, \omega + d\omega)$.

Следовательно, изменение импульса, создаваемое системой фотонов, падающих на площадку dS за единицу времени с частотами $(\omega, \omega + d\omega)$ и погло-

щаемых последней, определяется выражением:

$$\left. \begin{aligned} dP_{1x} &= (1 - \rho(\theta))d\Phi(\omega)\Delta p_{1x}d\omega = 0, \\ dP_{1y} &= (1 - \rho(\theta))d\Phi(\omega)\Delta p_{1y}d\omega = 0, \\ dP_{1z} &= (1 - \rho(\theta))d\Phi(\omega)\Delta p_{1z}d\omega = -p_\gamma(1 - \rho(\theta))j(\omega)\cos\theta dSd\omega \end{aligned} \right\}. \quad (3.7)$$

Здесь $\rho(\theta)$ - коэффициент отражения¹. Аналогично для системы фотонов, отраженных частицей, имеем:

$$\left. \begin{aligned} dP_{2x} &= \rho(\theta)d\Phi(\omega)\Delta p_{2x}d\omega = 2p_\gamma\rho(\theta)j(\omega)\sin\theta\cos^2\theta\cos\varphi dSd\omega, \\ dP_{2y} &= \rho(\theta)d\Phi(\omega)\Delta p_{2y}d\omega = 2p_\gamma\rho(\theta)j(\omega)\sin\theta\cos^2\theta\sin\varphi dSd\omega, \\ dP_{2z} &= \rho(\theta)d\Phi(\omega)\Delta p_{2z}d\omega = -2p_\gamma\rho(\theta)j(\omega)\cos^3\theta dSd\omega \end{aligned} \right\}. \quad (3.8)$$

Следовательно, согласно (3.3), имеем:

$$\left. \begin{aligned} \Delta P_x &= \Delta t \int (dP_{1x} + dP_{2x}) = \Delta t \int \int 2p_\gamma\rho(\theta)j(\omega)\sin\theta\cos^2\theta\cos\varphi dSd\omega, \\ \Delta P_y &= \Delta t \int (dP_{1y} + dP_{2y}) = \Delta t \int \int 2p_\gamma\rho(\theta)j(\omega)\sin\theta\cos^2\theta\sin\varphi dSd\omega, \\ \Delta P_z &= \Delta t \int (dP_{1z} + dP_{2z}) = \Delta t \int \int [-p_\gamma(1 - \rho(\theta))j(\omega)\cos\theta - \\ &\quad - 2p_\gamma\rho(\theta)j(\omega)\cos^3\theta] dSd\omega \end{aligned} \right\}. \quad (3.9)$$

Перейдем в сферическую систему координат посредством замены вида:

$$\left\{ \begin{aligned} x &= R_P \sin\theta' \cos\varphi = R_P \sin\theta \cos\varphi, \\ y &= R_P \sin\theta' \sin\varphi = R_P \sin\theta \sin\varphi, \\ z &= R_P \cos\theta' = -R_P \cos\theta \end{aligned} \right\}. \quad (3.10)$$

Здесь мы учли, что $\theta' = \pi - \theta$. Следовательно, элемент площади имеет вид:

$$dS = R_P^2 \sin\theta' d\varphi d\theta' = -R_P^2 \sin\theta d\varphi d\theta,$$

при этом

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0.$$

Следовательно, (3.9) можно переписать в виде:

$$\left. \begin{aligned} \Delta P_x &= -2R_P^2 \Delta t \left[\int_0^\infty p_\gamma j(\omega) d\omega \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \rho(\theta) \cos^2\theta \sin^2\theta d\theta \int_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi \right] = 0, \\ \Delta P_y &= -2R_P^2 \Delta t \left[\int_0^\infty p_\gamma j(\omega) d\omega \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \rho(\theta) \cos^2\theta \sin^2\theta d\theta \int_0^{2\pi} \sin\varphi d\varphi \right] = 0 \end{aligned} \right\}. \quad (3.11)$$

¹Необходимо заметить, что коэффициент отражения есть функция как угла падения, так и частоты падающего на частицу излучения, однако, учитывая факт, что спектральная светимость излучения Солнца достигает максимума в оптически видимой части спектра частот излучения, а с удалением от этой области быстро падает по величине, то учет частотной зависимости не приводит к значительным изменениям результатов.

Последние результаты имеют место благодаря тому факту, что

$$\int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi = 0.$$

$$\begin{aligned} \Delta P_z &= R_P^2 \Delta t \left[\int_0^\infty p_\gamma j(\omega) d\omega \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (1 - \rho(\theta)) \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi + \right. \\ &+ \left. 2 \int_0^\infty p_\gamma j(\omega) d\omega \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \rho(\theta) \cos^3 \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \right] = \\ &= 2\pi R_P^2 A_0 \Delta t \left[\int_{\frac{\pi}{2}}^0 (1 - \rho(\theta)) \cos \theta \sin \theta d\theta + 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \rho(\theta) \cos^3 \theta \sin \theta d\theta \right] = \\ &= -2\pi R_P^2 A_0 \Delta t \left[\frac{1}{2} + \mathcal{I}_1 - 2\mathcal{I}_2 \right], \end{aligned} \quad (3.12)$$

где

$$A_0 = \int_0^\infty p_\gamma j(\omega) d\omega, \quad (3.13)$$

$$\mathcal{I}_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho(\theta) \cos \theta \sin \theta d\theta, \quad (3.14)$$

$$\mathcal{I}_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho(\theta) \cos \theta \sin^3 \theta d\theta. \quad (3.15)$$

Следовательно, сила светового давления определится выражением:

$$F_p = F_{pz} = 2\pi R_P^2 A_0 \left[\frac{1}{2} + \mathcal{I}_1 - 2\mathcal{I}_2 \right]. \quad (3.16)$$

Выражение (3.21) содержит неизвестные параметры A_0 , \mathcal{I}_1 , \mathcal{I}_2 , которые подлежат определению. Поэтому следующий параграф данной работы будет посвящен вычислению параметра A_0 . Для вычисления \mathcal{I}_1 , \mathcal{I}_2 необходимо знать аналитическую зависимость $\rho = \rho(\theta)$. Аналитическое выражение для $\rho = \rho(\theta)$ было получено в работе [20], поэтому в настоящей работе мы воспользуемся уже известным результатом. С учетом явного вида $\rho(\theta)$ будут приведены аналитические результаты для \mathcal{I}_1 , \mathcal{I}_2 .

3.3 Вычисление параметра A_0 . Определение потенциала и светового давления

В данном параграфе будет найдено аналитическое выражение для параметра A_0 . Для этого будем рассматривать электромагнитное излучение Солнца с точки зрения квантовой теории как поток элементарных частиц – фотонов. Следовательно, спектральную плотность потока фотонов можно определить следующим соотношением:

$$j(w) = \frac{E(w)}{E_\gamma} = \frac{E(w)}{p_\gamma c}, \quad (3.17)$$

где $E(\omega)$ – спектральная освещенность, создаваемая Солнцем в точке, где находится данная частица. Последнюю наблюдаемую можно определить через спектральную испускательную способность Солнца $M(\omega)$. Согласно мо-

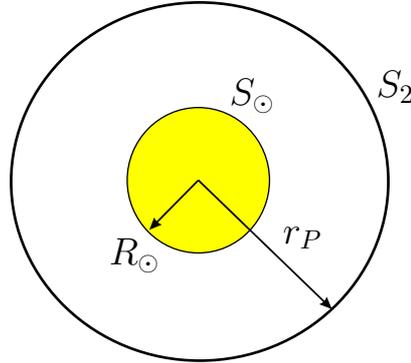


Рис. 3.2: К определению параметра A_0

дели физической системы, определенной в § 3.1, излучение Солнца является изотропным, следовательно, количество энергии, испущенное поверхностью Солнца S_\odot , будет равно количеству энергии, прошедшему через сферу радиуса r_P (r_P – расстояние от центра Солнца до частицы, см. рис. 3.2), т.е.

$$4\pi R_\odot^2 M(\omega) = 4\pi r_P^2 E(\omega),$$

$$E(\omega) = \left(\frac{R_\odot}{r_P}\right)^2 M(\omega) = \alpha^2 M(\omega), \quad (3.18)$$

где $\alpha = \frac{R_\odot}{r_P}$ – параметр, определяющий степень удаленности данной частицы от центра Солнца.

Согласно пункту 1 определения модели, Солнце есть абсолютно черное тело. Следовательно, $M(\omega)$ можно определить формулой Планка для испускательной способности АЧТ (2.17).

Следовательно,

$$A_0 = \int_0^\infty p_\gamma \frac{\alpha^2 M(\omega)}{p_\gamma c} d\omega = \frac{\alpha^2}{c} \int_0^\infty \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT_\odot}} - 1} d\omega =$$

$$\left(x = \frac{\hbar\omega}{kT_\odot}\right) = \frac{\alpha^2}{c} \frac{k^4 T_\odot^4}{4\pi^2 c^2 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\alpha^2 k^4 T_\odot^4 \pi^4}{4\pi^2 c^3 \hbar^3 15} =$$

$$= \frac{\alpha^2 \pi^2 k^4 T_\odot^4}{60 c^3 \hbar^3} = \frac{\alpha^2}{c} \sigma T_\odot^4, \quad (3.19)$$

где T_\odot – эффективная температура поверхности Солнца (5777.11 K), k – постоянная Больцмана, \hbar – постоянная Планка, $\sigma = \frac{\pi^2 k^4}{60 c^2 \hbar^3}$ – постоянная Стефана-Больцмана, c – скорость света в вакууме.

В итоге выражение для F_p с учетом результата (3.19) принимает вид:

$$F_p = \frac{2\pi R_P^2}{c r_P^2} R_\odot^2 \sigma T_\odot^4 \left[\frac{1}{2} + \mathcal{I}_1(n) - 2\mathcal{I}_2(n) \right]. \quad (3.20)$$

Отметим основные особенности полученного результата:

- во-первых, из (3.20) очевидно, что сила светового давления прямо пропорциональна квадрату радиуса частицы, следовательно, прямо пропорциональна площади ее поверхности;
- во-вторых, сила светового давления обратно пропорциональна квадрату расстояния от геометрического центра Солнца до частицы подобно силе притяжения, т. е. сила светового давления носит центральный характер. Поэтому по аналогии с силой притяжения можно построить эффективную потенциальную энергию действия излучения на частицу.

Нетрудно показать, что

$$U_{eff}^P = r_P \cdot F_p = \frac{2\pi R_P^2}{c r_P} R_\odot^2 \sigma T_\odot^4 \left[\frac{1}{2} + \mathcal{I}_1(n) - 2\mathcal{I}_2(n) \right]. \quad (3.21)$$

Эффективное световое давление (ЭСД) на частицу хвоста кометы определяется как отношение силы светового давления к площади большого круга сечения частицы:

$$P_{LP} = \frac{F_p}{\pi R_P^2} = \frac{2 R_\odot^2}{c r_P^2} \sigma T_\odot^4 \left[\frac{1}{2} + \mathcal{I}_1(n) - 2\mathcal{I}_2(n) \right]. \quad (3.22)$$

В качестве примера приведем аналитические выражения для силы светового давления и эффективного давления, представленные в работе [2]:

$$F_{old} = \frac{f_{sun}}{c} \pi R_P^2, \quad (3.23)$$

где $f_{sun} = (1366 \pm 4) \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$ – солнечная постоянная².

$$P_{old}^{LP} = \frac{F_{old}}{\pi R_P^2} = \frac{f_{sun}}{c}. \quad (3.24)$$

Следует отметить, что данные выражения справедливы только в том случае, если частица хвоста кометы моделируется абсолютно черным телом. Однако это является грубым приближением, поскольку в данной модели не учитываются оптические свойства вещества частицы (показатель преломления, коэффициент отражения), и, следовательно, игнорируется зависимость силы и светового давления от указанных параметров. Однако далее мы будем использовать выражения (3.23) и (3.24) в сравнительном анализе полученных результатов для силы светового давления и эффективного давления.

²Солнечная постоянная – полное количество лучистой солнечной энергии, проходящей за единицу времени через единицу площади, перпендикулярной направлению на Солнце, на расстоянии 1 а.е. [4].

3.4 Определение параметра $\rho(\theta)$

Как было показано в § 3.2, для вычисления силы светового давления необходимо знать явную функциональную зависимость коэффициента отражения ρ от угла падения θ . Поэтому в данном параграфе будет представлена методика расчета $\rho(\theta)$, предложенная в работе [20]. Полученное в [20] выражение для $\rho(\theta)$ будет использовано для расчета интегралов $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$.

Для нахождения зависимости $\rho(\theta)$ рассмотрим процесс отражения плоской электромагнитной волны на границе двух диэлектриков с диэлектрическими проницаемостями $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и с абсолютными показателями преломления n_1 и n_2 соответственно. Как известно, любую плоскую электромагнитную волну можно представить в виде суперпозиции двух плоских волн, в одной из которых колебания совершаются в плоскости падения, а в другой перпендикулярно к этой плоскости. Амплитуду первой составляющей для падающей волны мы обозначим через $E_{\parallel\text{пад}}$, а для второй – $E_{\perp\text{пад}}$, в случае отраженной волны: $E_{\parallel\text{отр}}$ и $E_{\perp\text{отр}}$ соответственно. Между данными амплитудами может быть установлена аналитическая связь, представленная соотношениями Френеля [21]:

$$E_{\parallel\text{отр}} = \frac{\tan(\theta_1 - \theta_2)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)} E_{\parallel\text{пад}}, \quad E_{\perp\text{отр}} = \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} E_{\perp\text{пад}}. \quad (3.25)$$

Коэффициент отражения может быть определен следующим соотношением:

$$\rho(\theta) = \frac{I_{\parallel\text{отр}} + I_{\perp\text{отр}}}{I_{\parallel\text{пад}} + I_{\perp\text{пад}}}. \quad (3.26)$$

Предполагая, что мы имеем дело с естественным (неполяризованным) светом, то $I_{\parallel\text{пад}} = I_{\perp\text{пад}} = \frac{1}{2}I$, где I – интенсивность падающего излучения. Учитывая тот факт, что интенсивность электромагнитного излучения прямо пропорциональна квадрату амплитуды волны, то из (3.25) следует, что

$$\left. \begin{aligned} I_{\parallel\text{отр}} &= \left(\frac{\tan(\theta_1 - \theta_2)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)} \right)^2 I_{\parallel\text{пад}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\tan(\theta_1 - \theta_2)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)} \right)^2 I, \\ I_{\perp\text{отр}} &= \left(\frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \right)^2 I_{\perp\text{пад}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \right)^2 I \end{aligned} \right\}. \quad (3.27)$$

И, следовательно,

$$\rho(\theta) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{\cos(\theta_1 + \theta_2)}{\cos(\theta_1 - \theta_2)} \right)^2 \right]. \quad (3.28)$$

Здесь θ_1 – угол падения светового луча, θ_2 – угол преломления светового луча. Преобразуем последнее выражение с учетом закона преломления светового

луча:

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21} = n. \quad (3.29)$$

Учитывая, что в нашей задаче одна из сред есть вакуум (среда 1), то $n_1 = 1$, тогда $n_{21} = n_2 = n$ – показатель преломления вещества частицы. Следовательно,

$$\sin \theta_2 = \frac{\sin \theta_1}{n}. \quad (3.30)$$

Рассмотрим функцию вида:

$$\begin{aligned} S(\theta_1) &= \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} = \frac{\sin \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_2 \cos \theta_1}{\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_2 \cos \theta_1} = \frac{\sin \theta_1 \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_1}{n^2}} - \frac{\sin \theta_1}{n} \sqrt{1 - \sin^2 \theta_1}}{\sin \theta_1 \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_1}{n^2}} + \frac{\sin \theta_1}{n} \sqrt{1 - \sin^2 \theta_1}} = \\ &= \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1} - \sqrt{1 - \sin^2 \theta_1}}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1} + \sqrt{1 - \sin^2 \theta_1}} = \frac{(\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1} - \sqrt{1 - \sin^2 \theta_1})^2}{n^2 - \sin^2 \theta_1 - 1 + \sin^2 \theta_1} = 1 - \frac{2}{n^2 - 1} \left[\sin^2 \theta_1 + \right. \\ &\left. + \sqrt{(n^2 - \sin^2 \theta_1)(1 - \sin^2 \theta_1)} - 1 \right]. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Таким образом,

$$S(\theta_1) = 1 - \frac{2}{n^2 - 1} \left[\sin^2 \theta_1 + \sqrt{(n^2 - \sin^2 \theta_1)(1 - \sin^2 \theta_1)} - 1 \right]. \quad (3.32)$$

Рассмотрим функцию вида:

$$\begin{aligned} C(\theta_1) &= \frac{\cos(\theta_1 + \theta_2)}{\cos(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2}{\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_1} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_1}{n^2}} - \frac{\sin^2 \theta_1}{n}}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_1} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_1}{n^2}} + \frac{\sin^2 \theta_1}{n}} = \\ &= \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_1} \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1} - \sin^2 \theta_1}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_1} \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1} + \sin^2 \theta_1} = \frac{(\sqrt{1 - \sin^2 \theta_1} \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1} - \sin^2 \theta_1)^2}{(1 - \sin^2 \theta_1)(n^2 - \sin^2 \theta_1) - \sin^4 \theta_1} = \\ &= 1 + \frac{2}{n^2 - (n^2 + 1) \sin^2 \theta_1} \sin^2 \theta_1 \left[\sin^2 \theta_1 - \sqrt{(n^2 - \sin^2 \theta_1)(1 - \sin^2 \theta_1)} \right]. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Таким образом,

$$C(\theta_1) = 1 + \frac{2}{n^2 - (n^2 + 1) \sin^2 \theta_1} \sin^2 \theta_1 \left[\sin^2 \theta_1 - \sqrt{(n^2 - \sin^2 \theta_1)(1 - \sin^2 \theta_1)} \right], \quad (3.34)$$

и, следовательно, коэффициент отражения (3.28) может быть представлен в виде (заменяя $\theta_1 \rightarrow \theta$):

$$\rho(\theta) = \frac{1}{2} S(\theta)^2 [1 + C(\theta)^2]. \quad (3.35)$$

Таким образом, получено аналитическое выражение для коэффициента отражения $\rho(\theta)$ вещества, из которого сделана частица, с показателем преломления n .

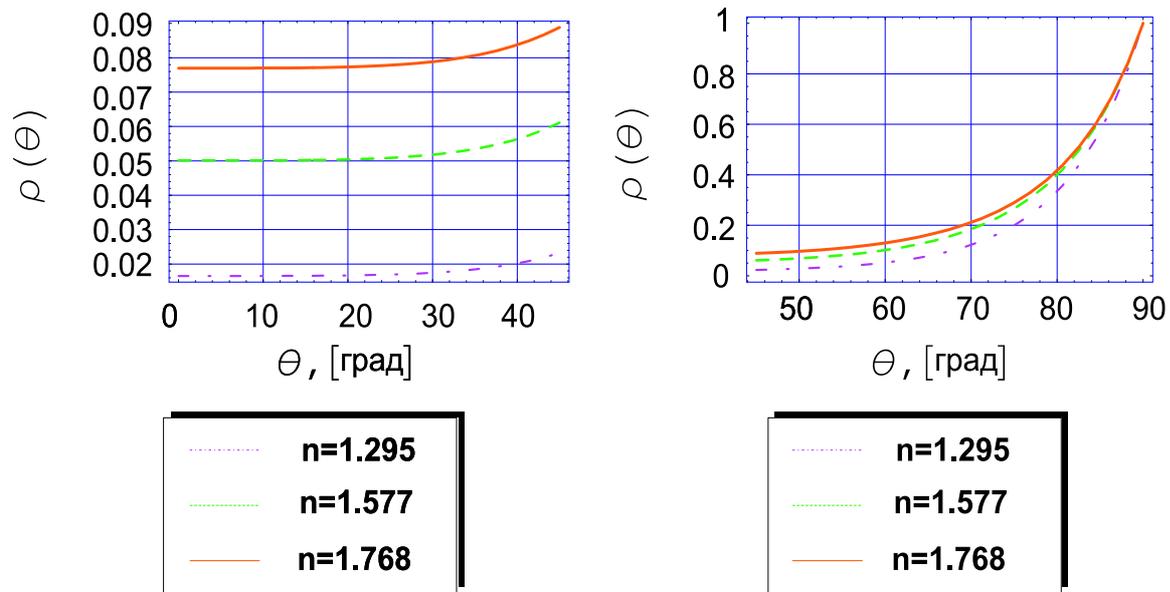


Рис. 3.3: Поведение коэффициента отражения $\rho(\theta)$ для водяного льда ($n=1.295$), пироксена ($n=1.577$) и оливина ($n=1.768$) в области малых и больших углов падения ($\theta \in [0, 90^\circ]$).

Вещество	водяной лед	пироксен	оливин
угол	$\rho(\theta), \%$	$\rho(\theta), \%$	$\rho(\theta), \%$
0°	1.65	5.01	7.70
20°	1.67	5.04	7.73
30°	1.75	5.18	7.88
40°	2.02	5.63	8.37
50°	2.84	6.90	9.70
60°	5.24	10.16	13.01
70°	12.26	18.45	21.12
80°	33.42	39.90	41.68
89°	89.30	90.58	90.71
90°	100	100	100

Таблица 3.1: Значения коэффициента отражения для водяного льда ($n=1.295$), пироксена ($n=1.577$) и оливина ($n=1.768$).

В заключение, чтобы продемонстрировать поведение результата (3.35), приведем графики зависимости $\rho = \rho(\theta)$ для водяного льда ($n=1.295$), а также наиболее распространенных космических силикатов – пироксена ($n=1.577$) и оливина ($n=1.768$) [22] (см. рис. 3.3). Также в таблице 3.1 представим значения коэффициента отражения для указанных веществ в зависимости от угла падения θ .

3.5 Вычисление интегралов \mathcal{I}_1 , \mathcal{I}_2

В данном параграфе будут представлены аналитические результаты для интегралов \mathcal{I}_1 , \mathcal{I}_2 как функций показателя преломления. Итак, согласно выражению (3.14), интеграл \mathcal{I}_1 имеет следующий вид:

$$\mathcal{I}_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho(\theta) \cos \theta \sin \theta d\theta. \quad (3.36)$$

Произведем замену переменных вида:

$$\left. \begin{aligned} y &= \sin \theta \\ dy &= \cos \theta d\theta \\ 0 &\leq y \leq 1 \end{aligned} \right\}. \quad (3.37)$$

И, следовательно, (3.36) можно переписать так:

$$\mathcal{I}_1 = \int_0^1 \rho(y) y dy. \quad (3.38)$$

Произведем еще одну замену переменных:

$$\left. \begin{aligned} x &= y^2 \\ dx &= y dy \\ 0 &\leq x \leq 1 \end{aligned} \right\}. \quad (3.39)$$

Заметим, что функция $\rho(\theta)$, согласно (3.32), (3.34), (3.35), зависит от $\sin^2 \theta$, следовательно, производя замену (3.39), мы получаем функцию $\rho(x)$ следующего вида:

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \left(1 - \frac{2}{n^2-1} \left(x + \sqrt{(x-n^2)(x-1)} - 1 \right) \right)^2 \times \\ &\times \left[1 + \left(1 + \frac{2x}{n^2-(n^2+1)x} \left(x - \sqrt{(x-n^2)(x-1)} \right) \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.40)$$

С учетом (3.39) и (3.40) выражение (3.38) может быть представлено в виде:

$$\mathcal{I}_1 = \frac{1}{2} \int_0^1 \rho(x) dx. \quad (3.41)$$

Используя метод подстановок Эйлера для вычисления последнего интеграла, с помощью компьютерной математической системы *Mathematica 5.0* [23],

получаем следующий аналитический результат:

$$\mathcal{I}_1(n) = \frac{1}{6(n^2 - 1)^2(n^2 + 1)^3} \left[1 + 3n^2 - 10n^3 + 18n^4 - 6n^5 + 10n^6 - 6n^7 - \right. \\ \left. - 3n^8 - 10n^9 + 3n^{10} + 24(n^4 + n^8) \ln[n] - 3(n^2 - 4n^4 + 6n^6 - 4n^8 + n^{10}) \times \right. \\ \left. \times \ln \left[\frac{n+1}{n-1} \right] \right]. \quad (3.42)$$

Рассмотрим интеграл \mathcal{I}_2 . Согласно (3.15), имеем:

$$\mathcal{I}_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho(\theta) \cos \theta \sin^3 \theta d\theta. \quad (3.43)$$

Вновь произведем замены переменных (3.37), (3.39). В результате \mathcal{I}_2 представляется следующим выражением:

$$\mathcal{I}_2 = \frac{1}{2} \int_0^1 \rho(x) x dx. \quad (3.44)$$

Вновь используя метод подстановок Эйлера (с помощью *Mathematica* 5.0), в результате получаем:

$$\mathcal{I}_2(n) = \frac{1}{192(n^2 - 1)^2(n^2 + 1)^4} \left[16 + 6n + 32n^2 + 50n^3 - 176n^4 - 122n^5 + \right. \\ \left. + 64n^6 + 578n^7 - 400n^8 + 578n^9 - 608n^{10} - 122n^{11} + 48n^{12} + 50n^{13} + 6n^{15} + \right. \\ \left. + 768n^6 \ln[n](1 - n^2 + n^4) - 3(n^2 - 1)^4(1 + 12n^2 + 70n^4 + 12n^6 + n^8) \times \right. \\ \left. \times \ln \left[\frac{n+1}{n-1} \right] \right]. \quad (3.45)$$

Глава 4

Результаты вычислений и сравнительный анализ

В данной главе будут представлены численные результаты для силы светового давления в сравнении с результатами, полученными предшественниками, сравнительный анализ силы притяжения, действующей со стороны Солнца на пылевую частицу, и силы давления электромагнитного излучения Солнца, а также численные результаты для эффективного светового давления.

4.1 Численные результаты для силы светового давления

Итак, в данном параграфе будут представлены численные результаты для силы светового давления, действующей на сферическую частицу из пироксена¹.

На рис. 4.1.а, 4.1.б представлены две кривые, определяющие зависимость силы светового давления от радиуса частицы: пунктирная кривая демонстрирует результат (3.23), представленный в работе [2], а непрерывная – результат (3.20). Отметим, что результат работы [2] является приближенным, поскольку при оценке силы давления автор использовал следующую элементарную модель: излучение Солнца, падающее нормально на плоскую, круглую абсолютно черную площадку. Очевидно, имеется существенное расхождение при $R_P \ll 1$ (м) (при $R_P = 10^{-5}$ (м) результаты отличаются в 4.9 раза; см. рис. 4.1.в), обусловленное тем, что в настоящей работе учитываются такие явления, как отражение и преломление на границе раздела "вакуум-среда", поглощение излучения средой частицы. На указанных масштабах поведение кривой объясняется эффектом частичной прозрачности среды. Однако на масштабах $R_P > 1$ (м) данные зависимости ведут себя почти эквивалентным образом

¹Показатель преломления и плотность пироксена были взяты из работы [22]. Значения фундаментальных констант были взяты из работы [24].

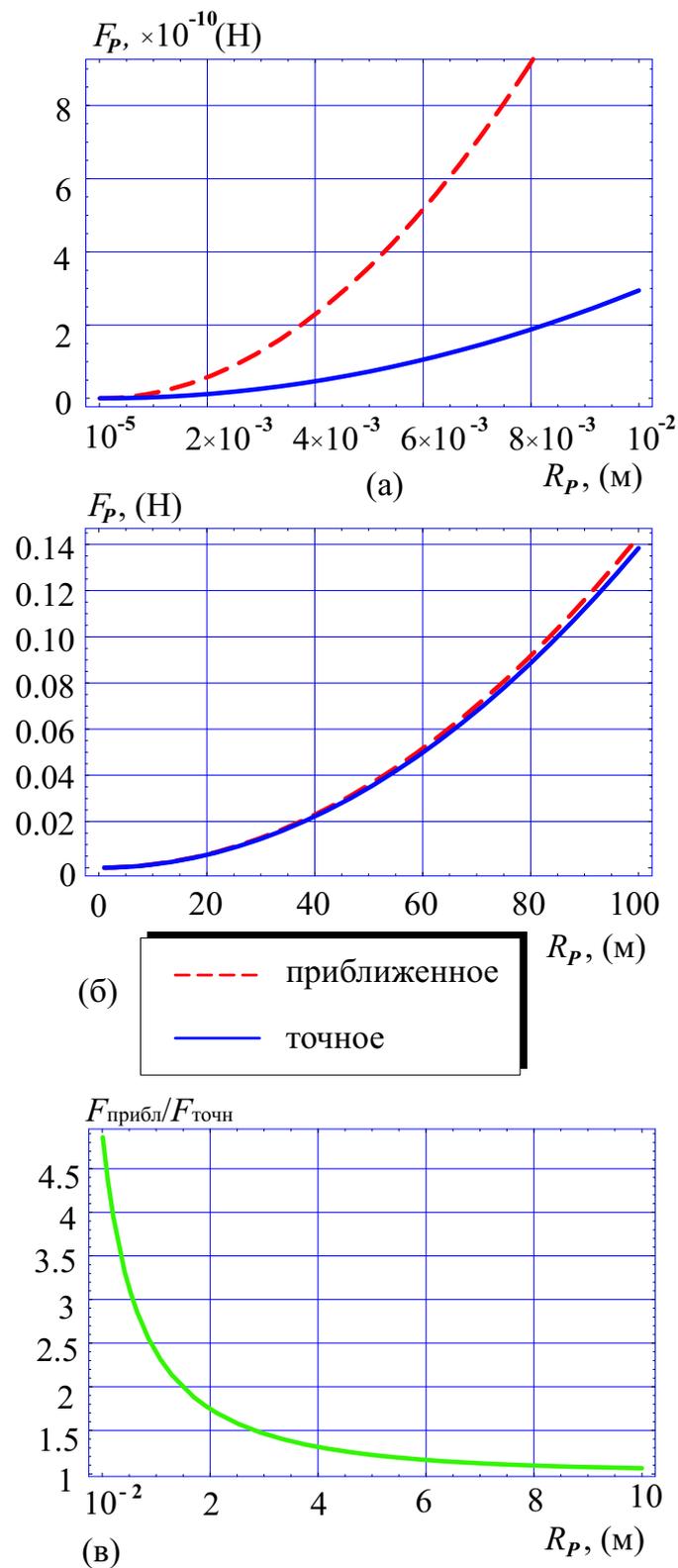


Рис. 4.1: Зависимость силы светового давления (приближенного и точного результатов – (а),(б) и их отношения – (в)) от радиуса частицы для случая $n = 1.577$, $r_P = 1$ а.е., $T_{\odot} = 5777.11$ К

(при $R_P = 10$ (м) результаты отличаются в 1.1 раза; см. рис. 4.1.в). Следовательно, основной вклад в определение силы светового давления вносят механизмы отражения и преломления на границе "вакуум-среда".

Таким образом, результат настоящей работы для силы светового давления F_p является более точным и должен быть использован вместо (3.23) для достижения большей точности прогноза теории.

4.2 Сравнительный анализ силы притяжения и силы светового давления

В данном параграфе будут представлены численные результаты для силы светового давления, действующей на сферические частицы из пироксена и водяного льда, в сравнении с силой притяжения со стороны Солнца. На рис. 4.2 представлена зависимость отношения указанных сил от радиуса частицы. Пунктирная кривая демонстрирует зависимость отношения данных сил для частицы из водяного льда, а непрерывная – для частицы из пироксена. Сравнительный анализ силы светового давления для сферических частиц из пироксена и водяного льда приводит к заключению о том, что сила светового давления по сравнению с силой притяжения со стороны Солнца значительно меньше для частицы из пироксена, чем для частицы из водяного льда. Для водяной частицы равенство данных сил должно выполняться при $R_c = 0.7 \cdot 10^{-6}$ (м) (критический радиус), в то время как для силикатной частицы равенство достигается уже при $R_c = 0.2 \cdot 10^{-6}$ (м). Таким образом, значение критического радиуса для силикатной частицы по сравнению с радиусом водяной частицы при прочих одинаковых условиях меньше в 3.5 раза. Этот факт может сыграть важную роль при рассмотрении вопросов необратимых потерь вещества Солнечной системой и формирования кометных пылевых дисков. Например, указанный факт косвенно свидетельствует о том, что пылевые диски, оставляемые кометой, должны быть более плотными в силу уменьшения критического радиуса.

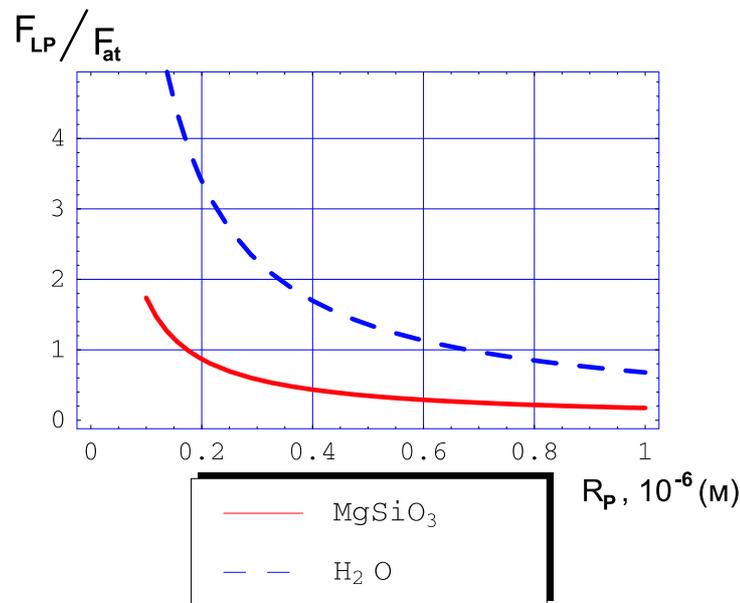


Рис. 4.2: Зависимость отношения силы светового давления к силе притяжения Солнца от радиуса частицы для случая $n = 1.577$ (пироксен) и $n = 1.295$ (водяной лед), $r_P = 1$ а.е., $T_{\odot} = 5777.11$ К, $\rho_{pyroxen} = 3190$ (кг/м³), $\rho_{ice} = 820$ (кг/м³)

4.3 Численные результаты для эффективного светового давления

Важным для всестороннего анализа полученного результата является исследование зависимости эффективного светового давления (ЭСД)² от различных параметров. На рис. 4.3 представлена зависимость ЭСД от гелиоцентрического расстояния силикатной частицы хвоста кометы. Очевидно, что с увеличением гелиоцентрического расстояния эффективное световое давление уменьшается и за орбитой Юпитера ($r_P > 5$ а.е.) уже составляет менее $0.2 \cdot 10^{-6}$ (Па).

Весьма существенной является зависимость ЭСД от эффективной температуры поверхности звезды (параболическая зависимость $\sim T^4$, см. рис. 4.4). При изменении температуры от 4000 (красные карлики) до 7000 (белые карлики) световое давление возрастает в 10 раз! Поэтому в звездных системах, подобных Солнечной системе, потери кометного вещества и, следовательно, время жизни кометы сильно зависят от температуры поверхности центрального светила.

На рис. 4.5 представлена зависимость ЭСД от радиуса частицы. Пунктирная кривая соответствует результату работы [2], а непрерывная — выражению (3.22). Эффективное световое давление, определяемое (3.22), является посто-

²Здесь и далее используется характеристика — *эффективное световое давление* (ЭСД), определяемое как отношение силы светового давления к площади большого круга сечения частицы. Именно данная характеристика наиболее выгодна в сравнительном анализе с экспериментальными данными.

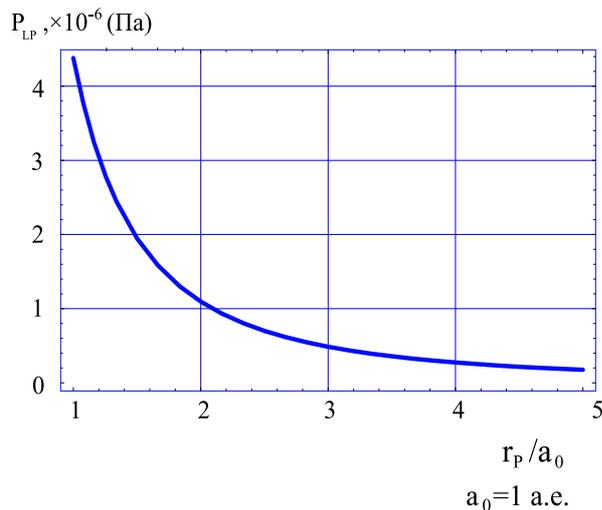


Рис. 4.3: Зависимость светового давления от гелиоцентрического расстояния частицы для случая $n = 1.577$, $T_{\odot} = 5777.11$ К, $R_P = 10^{-6}$ м

янным для любых радиусов частицы так же, как ЭСД, представленное в работе [2] и хорошо согласующееся с экспериментальным значением для плоской поверхности [4].

Существенное отличие в значениях давлений обусловлено тем, что в настоящей работе рассматриваются отражение и преломление излучения на границе раздела "вакуум-среда", поглощение излучения средой частицы, учитываются оптические свойства вещества частицы (коэффициент отражения, показатель преломления), а в работе [2] рассматривалось только поглощение излучения плоской площадкой.

Световое давление, определяемое на эксперименте, составляет $4.6 \cdot 10^{-6}$ (Па) [4]. Экспериментальные данные для эффективного давления на сферические частицы нам неизвестны. Из результатов работы, выполненной Б.Ю. Левиным в 1948 году на основе теории Ми (последняя построена на основе классической электродинамики Максвелла и классической теории рассеяния) и приведенных в [2], следует, что эффективное давление для частиц с $n = 1.5$ и $R_P = 1.5 \cdot 10^{-7}$ (м) составляет $1.78 \cdot 10^{-6}$ (Па). И вновь отличие в давлениях обусловлено пренебрежением в работе Левина рассмотрения эффектов отражения и преломления излучения телом частицы.

Таким образом, полученные результаты являются весьма важными, которые, несомненно, сыграют существенную роль в совершенствовании описания эволюции кометных форм, ядра кометы, пылевых дисков.

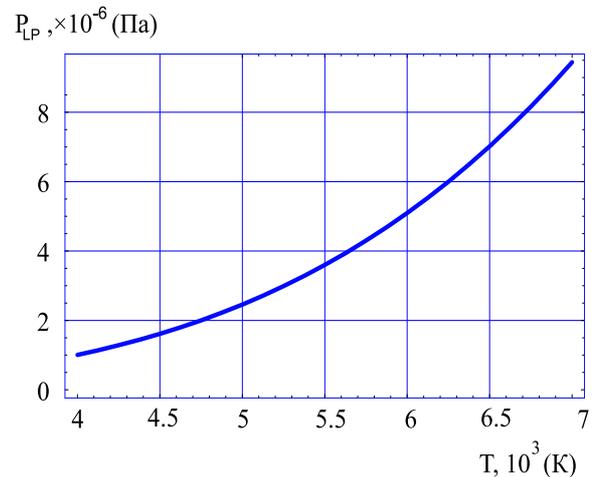


Рис. 4.4: Зависимость светового давления от температуры звезды T для случая $n = 1.577$, $r_P = 1$ а.е., $R_P = 10^{-6}$ м

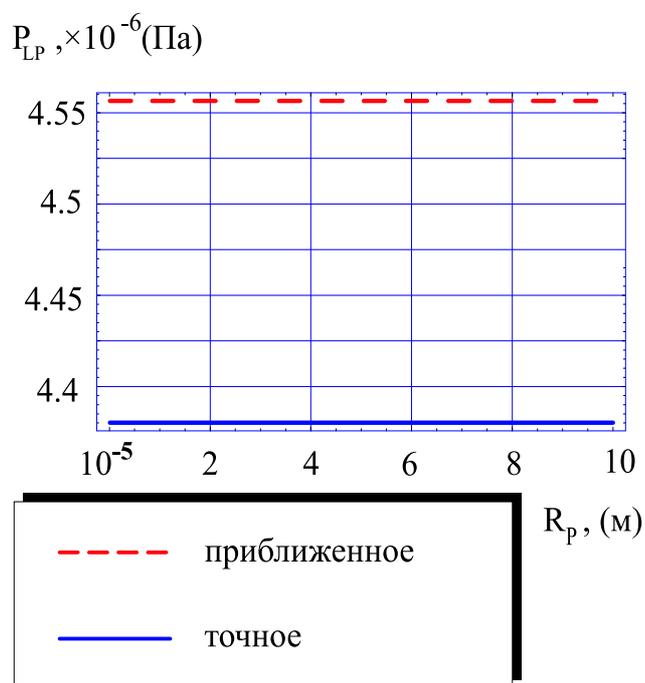


Рис. 4.5: Зависимость эффективного светового давления (приближенного и точного результатов) от радиуса частицы для случая $n = 1.577$, $r_P = 1$ а.е., $T_{\odot} = 5777.11$ К

Глава 5

Заключение

В данной работе получены и представлены следующие основные результаты.

- Собраны, переработаны и представлены элементы квантовой механики и квантовой теории излучения, отдельные результаты которых были задействованы для решения поставленных задач.
- Проведен прецизионный расчет силы светового давления и эффективного светового давления на пылевые частицы хвоста кометы в приближении геометрической оптики. Для расчета указанных характеристик были рассмотрены процессы отражения и преломления падающей на частицу электромагнитной волны, поглощение излучения средой частицы. Получены аналитические выражения для силы светового давления, действующей на сферическую частицу из пироксена, и соответствующего эффективного давления на основе разработанной модели в § 3.1.
- Выражения для силы светового давления и соответствующего эффективного давления исследованы на примере зависимостей от радиуса частицы, температуры звезды, гелиоцентрического расстояния частицы хвоста кометы. Проведено сравнение силы светового давления с силой притяжения Солнца, а также с результатами, полученными ранее. Установлено, что новые результаты приводят к уменьшению значения критического радиуса частицы из пироксена в 3.5 раза в сравнении с критическим радиусом водяной частицы при прочих одинаковых условиях. Данный факт свидетельствует о том, что силикатные частицы наименее подвержены дифференциации в пространстве под действием данных сил, и не исключено, что они могут образовывать достаточно однородные компактные скопления и двигаться по подобным траекториям (при одинаковых начальных условиях).
- Показано, что световое давление существенно зависит от температуры звезды, что неминуемо должно накладывать отпечаток на время жизни

кометы в рассматриваемой планетной системе. Установлено, что давление света не зависит от радиуса частицы и существенно убывает с увеличением гелиоцентрического расстояния частицы. Показано, что ЭСД для силикатных частиц в несколько раз (~ 1.1) меньше экспериментального макроскопического давления на плоскую площадку и давления, полученного в работе [2]. Отличие от результата работы [2] и экспериментального значения обусловлено исключительно различием в действии света на плоскую и сферическую поверхности. Указанное различие объясняется частичной прозрачностью среды корпускулы, а также ее формой, что учтено в настоящей модели. Экспериментальное значение часто используется в теории эволюции комет. Мы видим целесообразным использовать в подобных расчетах значение ЭСД, полученное в настоящей работе. Новый результат позволит уточнить значения ряда параметров (например, критического радиуса), играющих ключевую роль в описании эволюции комет.

- Показано, что сила светового давления является потенциальной и центральной, т.е. имеет зависимость от гелиоцентрического расстояния r_P вида $O(\frac{1}{r_P^2})$ аналогично силе притяжения Солнца. По аналогии с потенциалом центрального поля сил тяготения тела со сферически-симметричным распределением массы был построен механический потенциал светового давления. Путем построения данного потенциала осуществляется учет действия светового давления на частицу хвоста кометы при поиске законов движения последней в околосолнечном пространстве в рамках формализмов Лагранжа и Гамильтона.
- Попутно получено выражение для коэффициента отражения фотонов от поверхности частицы на основе волновых представлений о материи. Явно определена спектральная плотность потока фотонов.
- Полученные результаты могут быть использованы при высокоточном вычислении законов движения частицы хвоста кометы, исследовании физических характеристик как самой кометы, так и ближних окрестностей Солнечной системы, Солнца.

Литература

- [1] С.К. Всехсвятский Кометы в солнечной системе // М.: "Знание" (Новое в жизни, науке, технике. Серия "Космонавтика, астрономия", 2), 1974.- 64с.
- [2] О.В. Добровольский Кометы // М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1966.-288с.
- [3] Н.И. Невская Федор Александрович Бредихин // Москва-Ленинград, "Наука", 1964.-254с.
- [4] П.Г. Куликовский Справочник любителя астрономии // под ред. В.Г. Сурдина, изд. 5-е, перераб. и полн. обновл.-М.: Эдиториал УРСС, 2002.-688с.
- [5] К.И. Чурюмов Кометы и их наблюдение // М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1980.-160с.
- [6] P.N. Lebedev The Experimental Study of the Pressure of the Light // Annalen der Physik. Leipzig, 6, 1901, 433.
- [7] H.C. van de Hulst Light scattering by small particles // New York, Dover, 1981.
- [8] M. Kerker The scattering of light and other electromagnetic radiation // New York, Academic, 1969.
- [9] C.F. Bohren, D.R. Huffmann Absorption and scattering of light by small particles // New York, Wiley-Interscience, 1983.
- [10] P.W. Barber, S.S. Hill Light scattering by particles: Computational Methods // Singapore, World Scientific, 1990.
- [11] G. Mie Beitrage zur Optik truber Medien, speziell kolloidaler Metallosungen // Ann. Phys. Leipzig, 25, 1908. P. 377-445.
- [12] Hong Du Mie-scattering calculation // Applied Optics, 43 (9), 2004. P. 1951-1956.
- [13] F. Kurlbaum Wied. Ann., 65. 1898, 759.

- [14] O. Lummer, E. Pringsheim *Verhandl. Dtsch. Phys. Ges.*, 2. 1900, 176.
- [15] H. Rubens, F. Kurlbaum. *Sitzungsber. Akad. Wiss. Berlin*, 1900, 929.
- [16] H. Beckmann *Inaug-Dissert.* Tübingen, 1898, see also: H. Rubens. *Wied. Ann.*, 1899, 69, 582.
- [17] J.W.S. Rayleigh // *Phil. Mag.* **49**, 1900, 539.
J.W.S. Rayleigh // *Nature* **72**, 1905, 54.
J.W.S. Rayleigh // *Nature* **72**, 1905, 243.
- [18] J.H. Jeans // *Phil. Mag.* **10**, 1905, 91.
- [19] A. Einstein *Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt / On a Heuristic Point of View about the Creation and Conversion of Light* // *Annalen der Physik*. Leipzig 17, 1905, 132.
- [20] Ю.А. Снеткова Критический радиус частиц хвоста кометы как один из ключевых параметров в описании эволюции кометы // <http://www.astronet.ru/db/msg/1198166>
- [21] Г.С. Ландсберг *Оптика* // М.: Наука, 1976.- 926с.
- [22] J. Dorschner, B. Begemann, Th. Henning et al. Steps toward interstellar silicate mineralogy. II. Study of Mg-Fe-silicate glasses of variable composition // *Astron. Astrophys.* V.**300**. 1995. P. 503-519.
- [23] Т.В. Капустина Компьютерная система *Mathematica 3.0* для пользователей; Справ. пособие // М.: Солон-Р, 1999.-240с.
- [24] K. Nagivara et. el. // *Phys. Rev.*, **D66**, 010001. 2002.